



**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – БУРГАС
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ – СЕКЦИЯ БУРГАС**

ЧЕТИРИНАДЕСЕТО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

„СВ. НИКОЛАЙ ЧУДОТВОРЕЦ” – 27.11.2011 г.

Тема за дванадесети клас

ТЕСТ

1. За функцията $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ намерете стойностите на x за които $f(x) + f(-x) = 0$.
А) $x \in (-1; 1)$; Б) $x \in [0; 1)$; В) $x \in (-1; 0)$; Г) $x \in (-\infty; \infty)$.
2. За редицата $a_n = \cos(n+1)\pi - \cos n\pi$ сумата $a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}$ е:
А) -2 ; Б) 0 ; В) 2 ; Г) 1 .
3. Вписаната в равнобедрен трапец $ABCD$ окръжност се допира до бедрото BC в точка M . Отсечките AM и DM пресичат окръжността съответно в точките P и H . Изразът $AM : AP + DM : DH$ е равен на:
А) 5 ; Б) 12 ; В) 10 ; Г) 8 .
4. Редицата $\{a_n\}$ е аритметична прогресия. Намерете a_k , ако $a_m = n$ и $a_n = m$ ($m \neq n$).
А) $m - n - k$; Б) $n - m - k$; В) $k - m - n$; Г) $m + n - k$.
5. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} = 0$ е:
А) 5 ; Б) 3 ; В) 4 ; Г) 0 .
6. За триъгълник ABC $AB = 2$, $\angle BAC = \frac{\pi}{8}$ и $\angle ABC = \frac{5\pi}{8}$. Лицето на триъгълника ABC е:
А) 1 ; Б) 3 ; В) 4 ; Г) 2 .
7. Да се намери $\cos 2\alpha$, ако $9^{\sin^2 \alpha} + 9^{\cos^2 \alpha} = 6$.
А) 1 ; Б) $0,5$; В) 0 ; Г) -1 .
8. Определете стойностите на реалния параметър b във функцията $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ така, че уравнението $f(x) \cdot f(f(x)) = 0$ да няма реални корени.
9. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $4^x - a \cdot 2^x + a - 1 = 0$ има единствен реален корен.
10. Ортоцентърът на равнобедрен триъгълник, лежи на вписаната окръжност. Да се намери отношението от дължините на основата и бедрото на триъгълника.
11. Числото $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right)$ е:
А) 1 ; Б) $\frac{1}{2}$; В) 0 ; Г) 2 .
12. Стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = a$ има единствен реален корен са:
А) $1 \leq a < \frac{3}{2}$; Б) $1 < a < 2$; В) $0 < a \leq 1$; Г) $a \geq 2$.

13. Околните стени на триъгълна пирамида сключват с основата на пирамидата равни двустенни ъгли с големина $\frac{\pi}{8}$. Да се намери дължината на височината на пирамидата, ако дължините на основните ръбове са 2, 2 и $2\sqrt{2}$.

- А) $2\sqrt{2}-3$; Б) $3\sqrt{2}-4$; В) $\sqrt{2}-1$; Г) $2\sqrt{2}-1$.

14. Решенията на уравнението $\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{\sin^2 2x}=\frac{3}{4}$ са:

15. В окръжност е вписан трапец, а в него е вписана окръжност. Да се намерят ъглите на трапеца, ако отношението от радиусите на описаната и вписаната окръжности е $2\sqrt{5}$.

16. Произведението от най-малката и най-голямата стойности на функцията

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \text{ е:}$$

- А) $-\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{4}$; В) $-\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

17. Решенията на неравенството $\log_{0,5} \log_2(2x+1) \leq 1$ са:

- А) $x > \frac{\sqrt{2}+1}{2}$; Б) $x \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; В) $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. В окръжност с диаметър $AB = 2R$ е вписан четириъгълника $ABCD$. Диагоналите на четириъгълника се пресичат в точка M . Изразът $AM \cdot AC + BM \cdot BD$ е равен на:

- А) $4R^2$; Б) $9R^2$; В) $6R^2$; Г) $2R^2$.

19. Решенията на неравенството $2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10$ са:

- А) $[-4; -3] \cup [3; 4]$; Б) $(-\infty; \infty)$; В) $[-3; 3]$; Г) $(-3; -1) \cup (1; 3)$.

20. Графиката на функцията $f(x) = x^2 - \frac{a^2-1}{a}x - 1$ пресича абсцисната ос в точките A и B , ординатната ос в точка C . Окръжността през точките A, B и C пресича ординатната ос в точка D . Да се намерят координатите на точката D , лицето на четириъгълника $ACBD$ и най малката стойност на лицето на четириъгълника $ACBD$.

Задача

Да се намери функция $f(n)$ дефинирана и приемаща стойности в множеството на целите числа за която:

- 1) $f(f(n)) = n, \forall n \in Z$
- 2) $f(f(n+2)+2) = n, \forall n \in Z$
- 3) $f(0) = 1$.

Да се докаже, че тази функция е единствена.

Желаем Ви успех!

Резултатите ще бъдат публикувани на сайта на СМБ – Бургас, www.smbburgas.com, а закриването на състезанието е на **6.12.2011 г. от 14:30 ч.** в ОУ „Бр. Миладинови” – Бургас.

ОТГОВОРИ НА ТЕСТА И ЗАДАЧАТА

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. А) | 12. Г) |
| 2. Б) | 13. Б) |
| 3. В) | 14. $\forall x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in Z$ |
| 4. Г) | 15. $30^\circ; 30^\circ; 150^\circ; 150^\circ$ |
| 5. Б) | 16. В) |
| 6. А) | 17. Б) |
| 7. В) | 18. А) |
| 8. $b \in (0; 4)$ | 19. Г) |
| 9. $a \in (-\infty; 1] \cup \{2\}$ | 20. $D(0; 1); S = \frac{a^2+1}{ a }; S_{\min} = 2$ |
| 10. 4:3 | |
| 11. А) | |

Решение на задачата

Нека $f(n)$ е такава функция която е дефинирана и приемаща стойности в множеството на целите числа за която:

- 1) $f(f(n)) = n, \forall n \in Z$
- 2) $f(f(n+2)+2) = n, \forall n \in Z$
- 3) $f(0) = 1$.

От 1 и 2 имаме

$$f(f(f(n+2)+2)) \stackrel{om1}{=} f(n+2)+2$$

$$f(f(f(n+2)+2)) \stackrel{om2}{=} f(n)$$

Следователно $f(n+2)+2 = f(n)$ т.е. $f(n+2) = f(n) - 2$

Тогава $f(2) = f(0) - 2$

$f(4) = f(2) - 2 = f(0) - 4$ и отук по индукция за четни n получаваме, че

$$f(n) = f(0) - n = 1 - n$$

Аналогично $f(3) = f(1) - 2$

$f(5) = f(3) - 2 = f(1) - 4$ и отук по индукция за нечетни n получаваме, че

$f(n) = f(1) - (n-1)$ Тъй като $f(1) = f(f(0)) = 0$ получаваме, че

$f(n) = 0 - (n-1) = 1 - n$. Лесно се проверява, че тази функция удовлетворява условията 1, 2 и 3.