МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Б У Р Г А С

4 – 5 февруари 2011 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

4 – 8 КЛАС

Решения и примерно точкуване

Задача 4.1. Дадени са числовите изрази:

$A=15-5.(55503:7-47508:6):5$; $B=(543.4-4326:2):3+6$ и

$C=\left[(1999+2000+2001+2002)-(2009+2010+2011)\right].3-591.10$.

Пресметнете стойностите им.

Решение:

$A=15-5.(55503:7-47508:6):5$

$A=15-5.(7929-7918):5$

$A=15-5.11:5$ (2 т.)

$A=15-11$

$A=4$

$B=(543.4-4326:2):3+6$

$B=(2172-2163):3+6$

$B=9:3+6$ (2 т.)

$B=3+6$

$B=9$

$C=\left[(1999+2000+2001+2002)-(2009+2010+2011)\right].3-591.10$

$C=(8002-6030).3-591.10$

$C=1972.3-5910$ (2 т.)

$C=5916-5910$

$C=6$

Задача 4.2. Качвайки се на лифта, забелязах, че сядам на седалка с номер 5. Точно по средата на пътя срещнах седалката с номер 130.

а) Намерете броя на седалките, ако те са подредени по номера.

б) Една седалка изминава 50 *м* за една минута, а разстоянието между всеки две седалки е 8 *м*. За колко минути група от 26 ученици ще се изкачи на върха, ако на всяка седалка пътува по един пътник?

Решение: а) $(130-5).2=125.2=250$ седалки. (2 т.)

б) Дължината на въжето на лифта е $250.8=2000\,м$. Тогава разстоянието до върха е $2000:2=1000\,м$. (1 т.) Първият ученик се изкачва за $1000:50=20$ минути. (1 т.) Когато той слиза, 26-ият ученик след него се намира на разстояние $25.8=200\,м$. (1 т.) Това разстояние се изминава за $200:50=4$ минути. Следователно групата ще се изкачи за $20+4=24$ минути. (1 т.)

Задача 4.3. Като се използват девет различни цифри, всяка по веднъж, са записани три трицифрени числа със сбор 2011. Например $381+704+926=2011$ или $413+620+978=2011$ и т.н. Нека A е най-малкото от трите записани трицифрени числа. Кое е най-голямото число, което може да бъде равно на A?

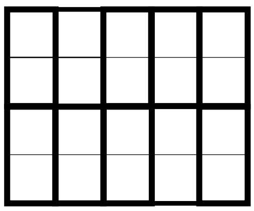
$$\begin{array}{r} * * * \\ + \; * * * \\ * * * \\ \hline 2\;0\;1\;1 \end{array}$$

Решение: Отг. $A=496$. Ще използваме, че сумата на всички цифри е 45. За да завършва сумата на единиците на трите числа на 1, тя трябва да е равна на 11 или 21. (1 т.) Ако сумата е 21, то сумата на десетиците на трите числа трябва да е равна на 19 или 9. Ако е 19, то $21+19=40$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 5 ($40+5=45$), което е невъзможно, защото сумата на три различни ненулеви цифри е поне $1+2+3=6$. (1 т.) Ако сумата на трите десетици е 9, то $21+9=30$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 15 ($30+15=45$), а в същото време да е равна на 19, за да е възможно $19+1=20$. Заключаваме, че сумата на трите единици е точно 11. (1 т.) Сега сумата на десетиците на трите числа е 20 или 10. Ако е 20, то сумата на трите стотици е най-много 14, а в същото време трябва да е равна на 18. В крайна сметка получаваме, че сумата на трите единици е 11, а сумата на трите десетици е 10. (1 т.) Сега сумата на трите стотици трябва да е 19. Търсеното число е по-малко от 600, защото $600+700+800=2100>2011$. Да проверим възможно ли е то да започва с 5. Ако започва с 5, сумата на другите две стотици е 14, което е възможно само ако трите стотици са 5, 6 и 8. За сумата на единиците на трите числа (в някакъв ред) има 3 случая: $9+2+0=11$, $7+4+0=11$ и $7+3+1=11$. В нито един от тези случаи обаче не е възможно да се образува сума 10 с някои три от неизползваните цифри. Следователно цифрата на стотиците на търсеното число е най-много 4. (1 т.) Тъй като търсим възможно най-голямото число, то първата възможност е да проверим за число от вида $49*$. Сега единствената възможност за стотиците на другите две числа е те да са 7 и 8 ($4+7+8=19$), а за десетиците на другите две числа единствената възможност е те да са 0 и 1 ($9+1+0=10$). Тогава най-голямото възможно число, което търсим, може да бъде 496. (1 т.) За цифрите на единиците на другите две числа остава единствената възможност да са 2 и 3. По този начин получаваме пример, който дава решение на задачата: $496+713+802=2011$. (1 т.)

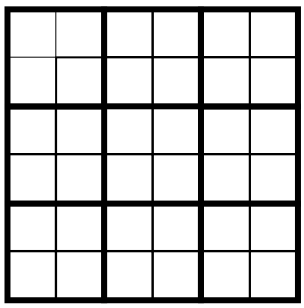
Задача 4.4. Дъска е разграфена на единични квадратчета, всяко от които е с дължина на страната 1 *см*. Гошко и Тошко разполагат с червени и сини правоъгълни плочки от домино с размери 2 *см* и 1 *см*. Гошко покрива дъската с червени плочки без застъпване. След това Тошко отстранява червените плочки и се стреми да покрие дъската със сини плочки без застъпване така, че никоя синя плочка да не заеме мястото на някоя червена. Винаги ли е възможно Тошко да покрие дъската по указания начин, ако дъската е:

а) правоъгълник с размери 5 *см* и 4 *см*; б) квадрат със страна 6 *см*?

Решение:



Черт. 1



Черт. 2

а) Не винаги е възможно. Да разгледаме например покриването с червени плочки от Черт. 1, в което всички плочки са вертикални (1 т.) и да вземем например първия ред 5×2. (1 т.) За да е изпълнено условието на задачата, Тошко трябва да покрие този ред само с хоризонтални сини плочки. Очевидно това е невъзможно. (1 т.)

б) Винаги е възможно. Да разделим дъската на квадрати 2×2 (вж. Черт. 2) и да разгледаме един такъв квадрат. (1 т.) Ако в него не се е намирала изцяло червена плочка, то Тошко може да постави в този квадрат 2 хоризонтални или 2 вертикални плочки по избор. (1 т.) Ако в разглеждания квадрат се е намирала хоризонтална червена плочка, то в него със сигурност не е могло да има вертикална плочка (изцяло) и Тошко може да постави 2 вертикални плочки. Аналогично, ако в разглеждания квадрат се е намирала вертикална червена плочка, то Тошко може да постави 2 хоризонтални плочки. (1 т.) Описаното покриване прилагаме за всички квадрати 2×2. Със сигурност никоя синя плочка няма да заеме мястото на някоя червена. (1 т.)

Задача 5.1. Намерете стойността на израза: $A = x - 0{,}01.b$, ако

$$b = 3{,}54.73 + 0{,}23.25 + 35{,}4.2{,}7 + 1{,}7.2{,}5,$$

а x е неизвестното число от равенството $5{,}1:(x-5{,}97)+1{,}25 = 68{,}5.2{,}5$.

Решение: Отг. $b = 364$, $x = 6$, $A = 2{,}36$.

$b = 3{,}54.73 + 0{,}23.25 + 35{,}4.2{,}7 + 1{,}7.2{,}5$
$b = 3{,}54.73 + 35{,}4.2{,}7 + 0{,}23.25 + 1{,}7.2{,}5$
$b = 3{,}54.73 + 3{,}54.27 + 0{,}23.25 + 0{,}17.25$
$b = 3{,}54(73+27) + 25(0{,}23+0{,}17)$ (2 т.)
$b = 3{,}54.100 + 25.0{,}4$
$b = 354 + 10$
$b = 364$

$5{,}1:(x-5{,}97)+1{,}25 = 68{,}5.2{,}5$
$5{,}1:(x-5{,}97)+1{,}25 = 171{,}25$
$5{,}1:(x-5{,}97) = 171{,}25 - 1{,}25$
$5{,}1:(x-5{,}97) = 170$ (2 т.)
$x - 5{,}97 = 5{,}1:170$
$x = 5{,}97 + 0{,}03$
$x = 6$

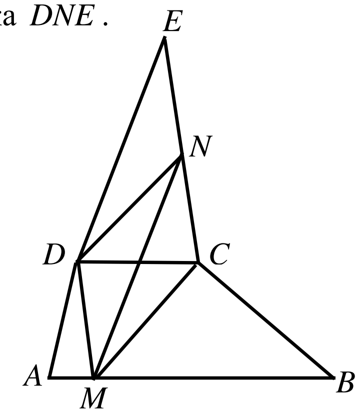
$A = x - 0{,}01.b$
$A = 6 - 0{,}01.364$ (2 т.)
$A = 6 - 3{,}64$
$A = 2{,}36$

Задача 5.2. В книжарницата Ани си харесала четири книги, но забелязала, че не й достигат 2 лв., за да си ги купи. Тя пресметнала, че ако си купи книгите без първата, ще й останат 4,50 лв., ако си купи книгите без втората, ще й останат 5,30 лв, ако си купи книгите без третата, ще й останат 3,90 лв., а ако си купи книгите без четвъртата, ще й останат 4,90 лв. Колко лева е имала Ани и колко струва всяка от четирите книги?

Решение: Ако към общата цена на втората, третата и четвъртата книга прибавим 4,50 лв., ще получим сумата, с която е разполагала Ани. (1 т.) Ако прибавим 2 лв. повече, т.е. 6,50 лв., ще получим увеличената с 2 лв. първоначална сума на Ани, което е общата цена на четирите книги. (1 т.) Следователно четирите книги без първата и още 6,50 лв. струват колкото четирите книги. Оттук заключаваме, че първата книга струва 6,50 лв. (2 т.) По същия начин получаваме, че втората книга струва $5{,}30 + 2 = 7{,}30$ лв., третата книга струва $3{,}90 + 2 = 5{,}90$ лв., а четвъртата струва $4{,}90 + 2 = 6{,}90$ лв. (1 т.) Ани е имала:

$$6{,}50 + 7{,}30 + 5{,}90 + 6{,}90 - 2 = 26{,}60 - 2 = 24{,}60 \text{ лв.}$$ (1 т.)

Задача 5.3. Даден е трапец $ABCD$ с лице 30 *кв. см*. Основите AB и CD изпълняват условието $AB = 2CD$. Извън трапеца е построен триъгълник DCE. Точката M лежи на основата AB и DM е успоредна на EC. Точката N лежи на отсечката CE и MN е успоредна на DE. Да се намери лицето на триъгълника DNE.



Решение: Нека $CD = a$ и h е височината на трапеца. Тогава $AB = 2a$ (1 т.) и $S_{ABCD} = \frac{2a+a}{2} \cdot h = 30$, откъдето $ah = 20$. (1 т.) От друга страна $S_{DMC} = \frac{a.h}{2} = 10$. (1 т.) Освен това триъгълниците DMC и DMN имат обща страна DM и равни височини към DM съответно от върховете C и N (защото правите DM и CN са успоредни). Следователно $S_{DMN} = S_{DMC} = 10$. (2 т.) Тъй като диагоналът DN разделя успоредника $DMNE$ на триъгълниците DMN и DNE, които са с равни лица, то $S_{DNE} = 10$ *кв. см*. (2 т.)

Задача 5.4. Учителката записва на дъската няколко различни естествени числа, а учениците трябва да запишат в тетрадките си всички възможни сборове на числата по двойки. При това, ако един сбор се получи повече от един път, то той трябва да се запише в тетрадките само веднъж. Например, ако на дъската са записани числата 1, 2, 6 и 7, учениците трябва да запишат в тетрадките си по веднъж числата 3, 7, 8, 9 и 13.

а) Учителката записала на дъската 5 числа. Колко най-малко и колко най-много числа могат да запишат учениците в тетрадките си?

б) Колко най-малко числа трябва да запише учителката на дъската, за да могат учениците да запишат в тетрадките си точно 11 числа?

Решение: а) Нека записаните числа на дъската са: $a < b < c < d < e$. (1 т.) Тогава сумите $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+e$, $c+e$ и $d+e$, които са 7 на брой, са различни, защото са наредени по големина. Следователно учениците трябва да запишат в тетрадките си поне 7 числа. (1 т.) Ако на дъската са записани например числата 1, 2, 3, 4 и 5, лесно може да се провери, че учениците трябва да запишат точно 7 суми – числата от 3 до 9 включително. (1 т.) Най-голям брой числа, които учениците могат да запишат в тетрадките си, ще се получи, ако всички двойки суми са различни. Тъй като броят на всички двойки суми е $4+3+2+1=10$, то най-големият възможен брой числа, които могат да се запишат в тетрадките, е 10. (1 т.) Това може да се случи, ако на дъската са записани например числата 1, 2, 4, 8 и 16. (1 т.)

б) От решението на а) следва, че на дъската трябва да бъдат записани поне 6 числа. (1 т.) Това е търсеният най-малък брой, защото примерът със записани числа 1, 2, 3, 4, 5 и 8 дава точно 11 различни суми – всички числа от 3 до 13 включително. (1 т.)

Задача 6.1. Стая има дължина 5,5 *м*, широчина 4 *м*, височина 2 *м* 80 *см*, врата с размери 2 *м* на 75 *см*, разположена на едната малка стена, и прозорец, заемащ 35% от едната голяма стена. Работник, започвайки работа в 7:55, успял до 9:32 да боядиса тавана и стената, на която е прозорецът. В колко часа́ трябва да продължи работа работникът, за да успее да боядиса останалите стени до 12:00 същия ден? (Считаме, че таванът и стените се боядисват еднакво бързо. Прозорецът и вратата не се боядисват.)

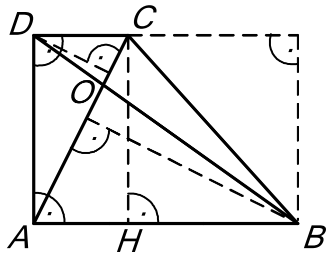
Решение: Стените имат лица $5{,}5.2{,}8 = 15{,}4$ *кв.м* и $4.2{,}8 = 11{,}2$ *кв.м*. Боядисаната до 9:32 площ е $4.5{,}5 + 0{,}65.15{,}4 = 22 + 10{,}01 = 32{,}01$ *кв.м*. (1 т.), като работата е продължила $5 + 60 + 32 = 97$ *мин*. (1 т.) Боядисвани са по $32{,}01 : 97 = 0{,}33$ *кв.м* на минута. (1 т.) За боядисване са останали $15{,}4 + 2.11{,}2 - 2.0{,}75 = 36{,}3$ *кв.м*, (1 т.) за които са нужни $36{,}3 : 0{,}33 = 110$ *мин* $= 1$ *ч* 50 *мин*. (1 т.) Работникът трябва да продължи в 10:10 часа́. (1 т.)

Задача 6.2. Даден е трапец $ABCD$, диагоналите на който AC и BD се пресичат в т. O и $AO = 3OC$. Бедрото AD е перпендикулярно на основите, лицето на ΔCOB е 12 *кв.см*.

а) Намерете лицето на трапеца $ABCD$.

б) Докажете, че височината на трапеца през върха C разделя трапеца на две равнолицеви части.

Решение: а) Триъгълниците AOB и COB имат обща височина от върха B, откъдето $S_{AOB} = 3S_{COB} = 36$ *кв.см*. (1 т.) Триъгълниците ACD и BCD имат обща основа и равни височини и следователно $S_{ACD} = S_{BCD}$. Но $S_{AOD} = S_{ACD} - S_{COD} = S_{BCD} - S_{COD} = S_{COB} = 12$ *кв. см*. (1 т.) Триъгълниците COD и AOD имат обща височина от върха D и $S_{COD} = \frac{1}{3} S_{AOD} = 4$ *кв.см*. (1 т.) Лицето на трапеца е $12+12+36+4=64$ *кв.см*. (1 т.)



б) Нека CH е височината на трапеца от върха C. Тогава $AHCD$ е правоъгълник и лицето му е 2 пъти по-голямо от лицето на триъгълника ACD. (1 т.) Имаме $S_{ACD} = S_{AOD} + S_{COD} = 12+4=16$ *кв.см*. и следователно $S_{AHCD} = 2.16 = 32$ *кв.см* $= \frac{1}{2} S_{ABCD}$. (1 т.)

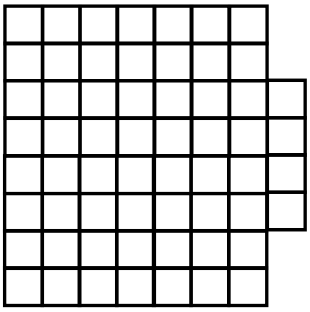
Задача 6.3. Естествените числа n и k ($k>1$) са такива, че сборът от цифрите на числото n^k е равен на 9, а произведението от цифрите му е равно на 24. Да се намерят n и k.

Решение: От условието следва, че в записа на числото n^k не може да се среща цифрата 0. Не могат да се срещат също цифрите 5, 7 и 9, тъй като тези цифри не са делители на 24. (1 т.) Да предположим, че в записа на n^k участва 8. Тогава освен осмицата трябва да има само една единица ($8+1=9$) и няма как произведението на цифрите на n^k да е равно на 24. Следователно цифрата 8 не участва в записа на n^k. (1 т.) Да предположим сега, че в записа участва цифрата 6. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 3, а това е възможно само ако останалите цифри са 1 и 2 или ако са три единици. Но и в двата случая няма как произведението от цифрите на n^k да е равно на 24. (1 т.) Заключаваме, че всички цифри в записа на n^k са измежду 1, 2, 3 и 4. Ако цифрата 4 участва, то тя е само една. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 5, а произведението им на 6. Оттук следва, че в записа на n^k трябва да има точно една цифра 3. За останалите цифри получаваме, че имат сбор 2 и произведение 2, а това е възможно точно когато в записа участва единствена двойка. Следователно в този случай цифрите на n^k са три: 2, 3 и 4. Ето защо n^k е някое от шестте числа: 234, 243, 324, 342, 423 и 432. Тъй като $234 = 2\cdot 3^2 \cdot 13$, $243 = 3^5$, $324 = 2^2 \cdot 3^4 = 18^2$, $342 = 2\cdot 3^2 \cdot 19$, $423 = 3^2 \cdot 47$ и $432 = 2^4 \cdot 3^3$, то оттук получаваме решенията $n=3$, $k=5$ и $n=18$, $k=2$. (2 т.) Нека сега в n^k не участва цифрата 4, т.е. участващите в записа на n^k цифри са 1, 2 и 3. За да бъде произведението на тези цифри 24, трябва да имаме три двойки и една тройка. Тъй като $2+2+2+3=9$, цифрата 1 не може да участва. Заключаваме, че за n^k има още четири възможности: 2223, 2232, 2322 и 3222. Сега $2223 = 3^2 \cdot 13 \cdot 19$, $2232 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31$, $2322 = 2 \cdot 3^3 \cdot 43$ и $3222 = 2\cdot 3^2 \cdot 179$, откъдето не получаваме нови решения. (2 т.) Така, единствените решения на задачата са $n=3$, $k=5$ и $n=18$, $k=2$.

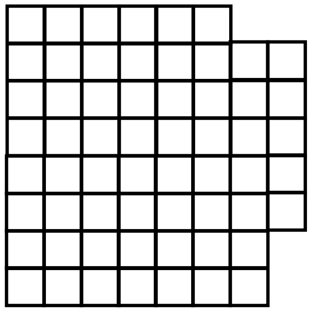
Задача 6.4. Квадратна дъска 8×8 е разделена на квадратчета 1×1, след което от нея са изрязани два правоъгълника 1×2. Възможно ли е останалата част от дъската да се покрие с плочки от домино с размери 1×2, половината от които са хоризонтални, ако:

а) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 1;

б) двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 2.

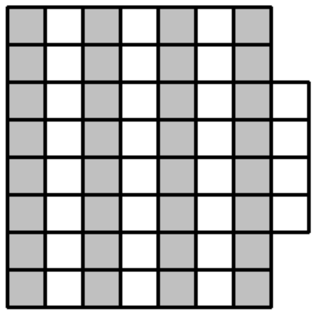


Черт. 1

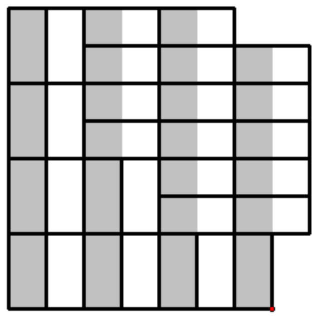


Черт. 2

Решение: а) Не е възможно. Оцветяваме дъската по колони в два цвята: черно и бяло, както е показано. (1 т.) Всички квадратчета са $64-4=60$ и са необходими $60:2=30$ плочки от домино. Следователно 15 от плочките трябва да са хоризонтални и 15 трябва да са вертикални. Броят на черните квадратчета е $4.8=32$, а този на белите е $3.8+4=28$. (1 т.) За една хоризонтална плочка са необходими едно черно и едно бяло квадратче, а за една вертикална плочка – съответно две бели или две черни. (1 т.) От друга страна 15 хоризонтални плочки покриват 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $32-15=17$ черни и $28-15=13$ бели квадратчета. Тъй като 17 и 13 са нечетни числа, покриването е невъзможно. (1 т.)



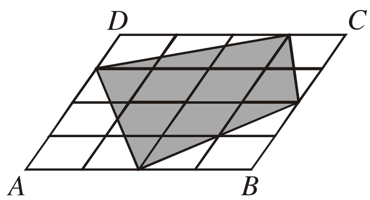
б) Възможно е. Оцветяваме дъската по същия начин. Сега черните квадратчета са $3.8+7=31$, а белите са $3.8+5=29$. Хоризонталните плочки ще покрият 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $31-15=16$ черни и $29-15=14$ бели квадратчета. (1 т.) Показан е пример на такова покриване. (2 т.)



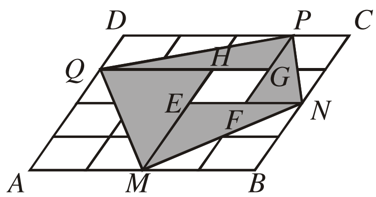
Задача 7.1. Един влак изминава разстоянието между гарите A и B за 4 ч 30 мин, а друг влак изминава същото разстояние за 6 ч 45 мин. В колко часа ще се срещнат влаковете, ако тръгнат едновременно един срещу друг от A и B в 8 ч 30 мин?

Решение: Нека разстоянието между A и B е s, а x е времето до срещата. Тогава, ако v_a е скоростта на влака, тръгнал от A, а v_b скоростта на влака, тръгнал от B, имаме $v_a x+v_b x=s$ (*). (2 т.) От друга страна, от равенството $v_a.4\frac{1}{2}=s$ намираме $v_a=\frac{2}{9}s$, а от $v_b.6\frac{3}{4}=s$ намираме $v_b=\frac{4}{27}s$. (2 т.) Като заместим в (*), получаваме $\frac{2}{9}sx+\frac{4}{27}sx=s$, откъдето $\frac{2x}{9}+\frac{4x}{27}=1$, $10x=27$, $x=\frac{27}{10}$ (1 т.). Влаковете ще се срещнат след 2 ч 42 мин, т.е. в 11 ч 12 мин. (1 т.)

Задача 7.2. Страните на успоредника $ABCD$ са разделени на 4 равни части с успоредни прави. Да се намери лицето на успоредника, ако лицето на затъмнения четириъгълник е равно на 68.



Решение: Да разделим четириъгълника $MNPQ$ на четири триъгълника и един успоредник, както е показано на чертежа. (2 т.) Имаме $S_{AMQ} = S_{MHQ}$, $S_{MBN} = S_{MEN}$, $S_{NCP} = S_{NPF}$ и $S_{PDQ} = S_{PGQ}$. (1 т.) Тогава, ако S е лицето на успоредника $ABCD$, то $S = 2S_{MNPQ} - S_{EFGH}$. (2 т.) Понеже $S_{EFGH} = \frac{1}{16}S$, имаме $S = 2.68 - \frac{1}{16}S$, откъдето $S = 128$. (1 т.)



Задача 7.3. В таблица 4×4 са разположени всички числа от 1 до 13, като в полетата от първия ред числата са еднакви, а в останалите полета са различни. Възможно ли е сборът по всеки ред и по всеки стълб да е един и същ? Обосновете отговора си.

Решение: Нека в полетата на първия ред е записано x и сборът по ред и стълб е S. Тогава, ако съберем сборовете по всички редове без първия и по всички стълбове, всяко от числата от 1 до 13 ще е броено по два пъти (1 т.), освен числото x, което ще е броено 4 пъти. (1 т.) Полученият сбор е $7S = 13.14 + 2x$. (1 т.) Тъй като $S = 4x$, от равенството $28x = 13.14 + 2x$ намираме $x = 7$ (1 т.), откъдето $S = 28$. Показани са две възможни разположения. За верен пример (3 т.), от които (1 т.) за частичен резултат.

7	7	7	7
1	13	10	4
11	2	3	12
9	6	8	5

7	7	7	7
1	13	10	4
12	3	2	11
8	5	9	6

Задача 7.4. Едно естествено число се нарича *интересно*, ако след прибавяне към него на сумата от цифрите му, се получава число, записано със същите цифри. Например числата 45, 279 и 9324 са *интересни*, защото $45+4+5=54$, $279+2+7+9=297$ и $9324+9+3+2+4=9342$.

а) Възможно ли е някое *интересно* число да е просто?

б) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа със сбор от цифрите 36.

в) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа, които са точни квадрати.

Решение: а) Ще използваме, че всяко естествено число и сборът от цифрите му дават един и същ остатък при деление на 9. (1 т.) Ако n е произволно *интересно* число със сума от цифрите s, то n и s дават един същ остатък x при деление на 9. От друга страна, числото $n+s$ трябва да има същите цифри като n и следователно трябва да дава остатък x при деление на 9. Получаваме, че числата $x+x$ и x трябва да дават един и същ остатък при деление на 9. Това е възможно само ако $x=0$, т.е. ако n се дели на 9. Следователно няма *интересно* число, което е просто. (1 т.)

б) Най-малкото естествено число със сбор от цифрите 36 е 9999, но то не е *интересно*. Затова ще потърсим *интересно* петцифрено число $\overline{abcde}$ такова, че $a+b+c+d+e=36$ и за което е вярно равенството $\overline{abcde}+36=\overline{abced}$. (1 т.) От последното следва, че $\overline{de}+36=\overline{ed}$. Чрез непосредствена проверка за цифрите d и e получаваме следните възможности: $15+36=51$, $26+36=62$, $37+36=73$, $48+36=84$ и $59+36=95$. С помощта на някоя от последните три можем да намерим *интересно* петцифрено число със сбор от цифрите 36, например $89937+36=89973$ (сборът от цифрите на 89937 е 36). (1 т.) Сега остава да забележим, че всички числа от вида $8990\ldots037$, където броят на нулите е произволен, са *интересни* и имат сбор от цифрите 36. (1 т.)

в) Единственото *интересно* двуцифрено число е 45, но то не е точен квадрат и при това няма точен квадрат, който да завършва на 45. Трицифрените *интересни* числа са 234, 279, 423, 468, 612, 657, 801 и 846. Нито едно от тях не е точен квадрат, като при това няма точен квадрат, който да завършва с последните две цифри на числата 234, 279, 423, 468, 612, 657 и 846. Изключение прави само числото 801. Затова да потърсим точен квадрат, последните две цифри на който са 01, който е *интересно* четирицифрено число, при това кратно на 9. (1 т.) Числата, които имат четирицифрени квадрати, завършващи на 01, са 49, 51 и 99. От тях $51^2 = 2601$ ни дава пример за *интересно* число, което е точен квадрат. Нещо повече, от това число лесно можем да получим, че числото $\left(5\cdot 10^n + 1\right)^2 = 25\cdot 10^{2n} + 10^{n+1} + 1 = 25\underbrace{00\ldots0}_{n-2}1\underbrace{00\ldots0}_{n}1$ за всяко $n > 2$ е пример за *интересно* число, което е точен квадрат. (1 т.)

Задача 8.1. Да се решат уравненията:

а) $\left(x^2+3x+2\right)^2 = 3x\left(x^2+3x+2\right)$;

б) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right) = 2x^2$.

Решение: а) $\left(x^2+3x+2\right)^2 = 3x\left(x^2+3x+2\right) \Leftrightarrow \left(x^2+3x+2\right)^2 - 3x\left(x^2+3x+2\right) = 0$

$\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x+2-3x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+2\right) = 0$. (1 т.)

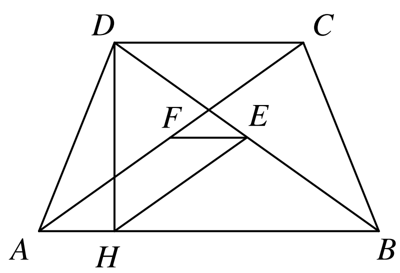
Оттук получаваме $x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=-2$ и $x^2+2=0$ няма решения. (1 т.)

б) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right) = 2x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+3x+2-2x\right)\left(x^2+3x+2-x\right) = 2x^2 \Leftrightarrow$ (2 т.)

$\Leftrightarrow \left(x^2+3x+2\right)^2 - 3x\left(x^2+3x+2\right) + 2x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+2\right) = 0$

$\Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=-2$. (2 т.)

Задача 8.2. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е петата на височината през върха D, точката E е средата на диагонала BD и $HE \parallel AC$. Ако лицето на триъгълника DBH е S, да се намери лицето на $ABCD$.



Решение: Построяваме $EF \parallel AB$, $F \in AC$. (1 т.) Тогава $AHEF$ е успоредник и $AF = HE$. (1 т.) Тъй като HE е медиана в правоъгълния ΔDHB, то $HE = \frac{1}{2}BD$. Но $AF = \frac{1}{2}AC$ (1 т.), откъдето получаваме $AC = BD$. Следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец. (1 т.) Имаме $HB = AB - AH = AB - \frac{AB-CD}{2} = \frac{AB+CD}{2}$ и

$S_{ABCD} = DH.HB$. (1 т.) Но $S_{DBH} = S = \frac{1}{2}DH.HB$, откъдето $S_{ABCD} = 2S$. (1 т.)

Задача 8.3. Нека a, b и c са дължините на страните на триъгълник. Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

$$x^2 - 2c\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}x + \left(a^2-b^2\right)^2 + c^4 = 0.$$

Решение: Броят на реалните корени зависи от знака на дискриминантата: $\frac{1}{4}D = c^2 2\left(a^2+b^2\right) - \left(a^2-b^2\right)^2 - c^4$. Като използваме, че $2\left(a^2+b^2\right) = \left(\left(a+b\right)^2 + \left(a-b\right)^2\right)$, имаме: $\frac{1}{4}D = c^2 2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2 - c^4 = c^2\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) - (a^2-b^2)^2 - c^4$. (1 т.)

Разкриваме скобите, групираме събираемите и разлагаме на множители:

$$c^2\left((a+b)^2+(a-b)^2\right)-(a^2-b^2)^2-c^4 = c^2(a+b)^2 - c^4 + c^2(a-b)^2 - (a-b)^2(a+b)^2 =$$
$$c^2\left((a+b)^2-c^2\right)-(a-b)^2\left((a+b)^2-c^2\right) = \left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right).$$ (1 т.)

След повторно разлагане получаваме:

$$\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right) = (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b).$$ (1 т.)

Тъй като a, b и c са страни на триъгълник, то $a>0$, $b>0$ и $c>0$. (1 т.) Освен това $a+b>c$, $b+c>a$ и $c+a>b$. (2 т.) Следователно: $(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$ и уравнението има два реални корена. (1 т.)

Задача 8.4. За всяко реално число x означаваме с $[x]$ най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x. Да се намерят всички прости числа p, за които числото

$$\left[\frac{p^2+1}{2}\right]+\left[\frac{p^2+2}{3}\right]+\left[\frac{p^2+7}{8}\right]+\left[\frac{p^2+18}{24}\right]$$

е просто.

Решение: При $p=2$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2}\right]+\left[\frac{p^2+2}{3}\right]+\left[\frac{p^2+7}{8}\right]+\left[\frac{p^2+18}{24}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{11}{8}\right]+\left[\frac{22}{24}\right]=2+2+1+0=5,$$

което е просто число. Следователно $p=2$ е решение на задачата. (1 т.)

При $p=3$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2}\right]+\left[\frac{p^2+2}{3}\right]+\left[\frac{p^2+7}{8}\right]+\left[\frac{p^2+18}{24}\right]=\left[\frac{10}{2}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{16}{8}\right]+\left[\frac{27}{24}\right]=5+3+2+1=11,$$

което също е просто число. Следователно и $p=3$ е решение на задачата. (1 т.)

Нека $p\ge 5$ е просто число. Тогава $p^2-1=(p-1)(p+1)$, което е произведение на две последователни четни числа и следователно се дели на 8. (1 т.) Освен това разглежданото произведение се дели и на 3, тъй като едно от числата $p-1$ или $p+1$ се дели на 3. (1 т.) Заключаваме, че p^2-1 се дели на 24 и следователно $p^2=24k+1$ (k е естествено число). Оттук получаваме

$$\left[\frac{p^2+1}{2}\right]+\left[\frac{p^2+2}{3}\right]+\left[\frac{p^2+7}{8}\right]+\left[\frac{p^2+18}{24}\right]=\left[\frac{24k+2}{2}\right]+\left[\frac{24k+3}{3}\right]+\left[\frac{24k+8}{8}\right]+\left[\frac{24k+19}{24}\right]=$$
$$=12k+1+8k+1+3k+1+k=24k+3.$$ (2 т.)

Полученото число не може да бъде просто, защото се дели на 3 и е по-голямо от 3. (1 т.) Така, $p=2$ и $p=3$ са единствените решения на задачата.

Автори на задачите са:

4.1. и 4.2. – И. Старибратов, 4.3. и 4.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

5.1., 5.2. и 5.3. – Д. Миланова, 5.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

6.1. – И. Кортезов, 6.2. – И. Шаркова, 6.3. – Св. Дойчев и С. Гроздев , 6.4. – Д. Миланова;

7.1. – И. Ангелов, 7.2. – Т. Витанов, 7.3. – И. Кортезов, 7.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

8.1., 8.2. и 8.3. – Ч. Лозанов, 8.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев.